

Initial ideals of generic ideals and variations of Moreno-Socías conjecture

大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
谷光一郎 (Koichiro TANI) *

概要

Moreno-Socías 予想は次数付き逆辞書式順序に関するジェネリックイデアルのイニシャルイデアルに関する予想である。一般の単項式順序について、ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは Borel-fixed であることを示した。これは、一般の単項式順序で成り立つ弱い Moreno-Socías 予想とみなすことができる。また、辞書式順序に類推した Moreno-Socías 予想についても考察し、予想が成り立つ場合と成り立たない場合をそれぞれ発見した。本講演ではそれらについて紹介する。

1 導入

1.1 グレブナー基底

\mathbb{k} を体とし、 S を \mathbb{k} 上の n 変数多項式環 $\mathbb{k}[\bar{x}] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ とする。ここで、 \bar{x} は変数の集合 $\{x_1, \dots, x_n\}$ である。 $\mathcal{M}(\bar{x})$ を \bar{x} の変数からなる単項式全体の集合とする。 \preceq を $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上で定義される全順序で以下の条件を満たすとする:

- 単項式 m_1, m_2, m_3 について、 $m_1 \preceq m_2$ ならば、 $m_1 m_3 \preceq m_2 m_3$ を満たす;
- $1 \in \mathcal{M}(\bar{x})$ が最小元である。

このような条件をみたす $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上の順序を**単項式順序**という。単項式順序で代表的なものとして、辞書式順序 (lexicographic order) と次数付き逆辞書式順序 (degree reverse lexicographic order) がある。

Definition 1.1 (辞書式順序). 以下のように定義される単項式順序を**辞書式順序**と呼ぶ:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \preceq x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \stackrel{\text{def}}{\iff} a_i \neq b_i \text{ を満たす最小の } i \text{ について, } a_i < b_i \text{ が成り立つ.}$$

Definition 1.2 (次数付き逆辞書式順序). 以下のように定義される単項式順序を**次数付き逆辞書式**

* E-mail: tani-k@ist.osaka-u.ac.jp

順序と呼ぶ:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \preceq x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i \right) \text{ または}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i \text{ かつ } a_i \neq b_i \text{ を満たす最大の } i \text{ について, } a_i > b_i \right).$$

多項式 $f \in S$ について, f に出てくる項の中で単項式順序 \preceq に関して最も大きい項を $\text{in}_{\preceq}(f)$ と書き, f の先頭項と呼ぶ. S のイデアル I について, $\{\text{in}_{\preceq}(f) \mid f \in I\}$ で生成される \mathbb{k} -ベクトル空間は再び S のイデアルになる. これを I のイニシャルイデアルと呼び, $\text{in}_{\preceq}(I)$ と書く. イニシャルイデアルのような, 単項式で生成されるイデアルを単項式イデアルという.

イデアル I と単項式順序 \preceq について, 多項式の有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ が

$$\text{in}_{\preceq}(I) = (\text{in}_{\preceq}(g_1), \dots, \text{in}_{\preceq}(g_t))$$

を満たすとき, \mathcal{G} は I の \preceq に関するグレブナー基底であるという. ただし, $(\text{in}_{\preceq}(g_1), \dots, \text{in}_{\preceq}(g_t))$ は $\text{in}_{\preceq}(g_1), \dots, \text{in}_{\preceq}(g_t)$ で生成されるイデアルである. グレブナー基底 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_t\}$ が被約であるとは, 各 g_i がモニックであり, g_i の各項が $\text{in}_{\preceq}(g_j) (i \neq j)$ では割り切れないことを言う. イデアル I と単項式順序 \preceq を決めると, 被約グレブナー基底が一意に定まることが知られている. グレブナー基底の詳細に関しては, [2] や [3] などを参照されたい.

1.2 ジェネリックイデアル

以降, \mathbb{k} は無限体とし, S のイデアル I は斉次多項式 f_1, \dots, f_s で生成される斉次イデアルとする. また, $\deg(f_i) = d_i \geq 1$ とする. 剰余環 S/I のヒルベルト関数を

$$\text{HF}(S/I, d) = \dim_{\mathbb{k}}(S/I)_d$$

で定め, ヒルベルト級数を以下のように定める:

$$\text{HS}(S/I; t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \dim_{\mathbb{k}}(S/I)_i t^i.$$

生成系の各 f_i は次数 d_i の単項式の一次結合でかけるので, $a_{j,k} \in \mathbb{k}$ として

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{1,1} x_1^{d_1} + a_{1,2} x_1^{d_1-1} x_2 + \cdots + a_{1,r_1} x_n^{d_1} \\ &\vdots \\ f_s &= a_{s,1} x_1^{d_s} + a_{s,2} x_1^{d_s-1} x_2 + \cdots + a_{s,r_s} x_n^{d_s} \end{aligned}$$

という形でかける. ここで $r_i = \binom{n+d_i-1}{d_i}$ は d_i 次単項式の個数であり, $N = \sum_{i=1}^s r_i$ とする. 係数 $a_{j,k}$ を並べて $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ の点と対応させることでイデアル I を点 $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ と対応させることができる. $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ のザリスキ開集合 U が存在して, U の点に対応するイデアル全てで同じ性質を共有するとき, その性質はジェネリックなイデアルで成り立つといわれる. 例えば以下のような性質が知られている.

Lemma 1.3 ([6, Theorem 1]). n, s, d_1, \dots, d_s を固定する. 稠密なザリスキ開集合 $U \subset \mathbb{A}_k^N$ が存在して, U の各点 \mathbf{a} に対応するイデアル I でヒルベルト級数 $\text{HS}(S/I)$ が同じになる.

以下の予想は **Fröberg 予想** として知られている.

Conjecture 1.4 ([5]). n, s, d_1, \dots, d_s を固定する. *Lemma 1.3* で記述されているジェネリックなイデアル I について, ヒルベルト級数 $\text{HS}(S/I; t)$ は $|\frac{\prod_{i=1}^s (1-t^{d_i})}{(1-t)^n}|$ になる. ここで, $|\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i|$ は b_i を以下のように定義された形式的冪級数 $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ である:

$$b_i = \begin{cases} a_i & (a_j > 0 \text{ for all } j \leq i) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

また, イニシャルイデアルに関しても *Lemma 1.3* と同じような補題がある.

Lemma 1.5 (See, e.g., [10]). 単項式順序 \preceq を固定する. 稠密なザリスキ開集合 $V \subset \mathbb{A}_k^N$ が存在して, V の各点 \mathbf{a} に対応するイデアル I でイニシャルイデアル $\text{in}_{\preceq}(I)$ が同じになる.

Definition 1.6. J を単項式イデアルとし, \preceq を次数付き逆辞書式順序とする. J の極小生成系にある任意の単項式 m について, $\deg(m) = \deg(m')$ かつ $m \preceq m'$ が成り立つ全ての単項式 m' が再び J に属するとき, J は **weakly reverse lexicographic** であるという.

以下の予想は **Moreno-Sociás 予想** として知られている.

Conjecture 1.7 ([9]). n, s, d_1, \dots, d_s を固定する. *Lemma 1.5* で記述されているジェネリックなイデアル I について, 次数付き逆辞書式順序に関する I のイニシャルイデアルは *weakly reverse lexicographic* である.

Lemma 1.3 と *Lemma 1.5* で記述されている稠密なザリスキ開集合 U と V は $V \subset U$ であるが一般には等しくない. 今後, U の点に対応するイデアルを U -ジェネリックイデアルと呼び, V の点に対応するイデアルを V -ジェネリックイデアルと呼ぶことにする.

2 主定理

2.1 一般の単項式順序に関する結果

一般の単項式順序での V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルについて述べる. Bayer-Stillman [1] の結果をジェネリックイデアルのイニシャルイデアルに対して類推して以下を示した.

Theorem 2.1. n, s, d_1, \dots, d_s を固定し, 単項式順序 \preceq を任意にひとつ定める. このとき, V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは *Borel-fixed* である.

ここでは, *Borel-fixed* な単項式イデアルの定義は省略するが, *Proposition 2.2* のような特徴づけがある. 非負整数 s と t について, 二項係数 $\binom{t}{s}$ が $\binom{t}{s} \not\equiv 0 \pmod{p}$ を満たすとき, $s \preceq_p t$ と書くことにする. $p = 0$ のときは, \preceq_p は通常の全順序 \leq と同じである.

Proposition 2.2 ([4, Theorem 15.23]). $J \subset S$ を単項式イデアル, $p \geq 0$ を体 \mathbb{k} の標数とする. J が *Borel-fixed* であることの必要十分条件は, J の生成系にある任意の単項式 m が x_j^t で割り切れて x_j^{t+1} で割り切れないとき, 全ての $i < j$ と $s \preceq_p t$ で $(x_i/x_j)^s m \in J$ が成り立つことである.

Proposition 2.2 から, 単項式イデアル J が weakly reverse lexicographic ならば, J は Borel-fixed であることがわかる. したがって, Theorem 2.1 は Moreno-Sociás 予想とは矛盾しておらず, 一般の単項式順序で成り立つ弱い Moreno-Sociás 予想とみなすことができる.

2.2 辞書式順序に関する結果

Moreno-Sociás 予想を辞書式順序へ類推した場合を考えてみる. weakly reverse lexicographic イデアルの辞書式順序版としてみなせるもののひとつは lexsegment イデアルと呼ばれ, よく調べられている.

Definition 2.3 (lexsegment イデアル). 単項式順序 \preceq は辞書式順序とする. J に属する任意の単項式 m について, $\deg(m) = \deg(m')$ かつ $m \preceq m'$ が成り立つ全ての単項式 m' が再び J に属するとき, J を **lexsegment イデアル** と呼ぶ.

Lexsegment イデアルの詳細については, [7, Section 6.3] や [8, Section 2.4] を参照されたい.

辞書式順序に関するジェネリックイデアルのイニシャルイデアルが lexsegment になるのかどうか考える. Theorem 2.1 の証明で行った議論を使い, 辞書式順序に当てはめて以下を示した.

Theorem 2.4. n, s, d_1, \dots, d_s を固定し, 単項式順序を辞書式順序とする. ある点 $\mathbf{a} \in U$ が存在して, \mathbf{a} に対応する I のイニシャルイデアルが *lexsegment* ならば, V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは *lexsegment* である.

Theorem 2.4 を使って, V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルが lexsegment になるような状況を見つけることができた.

Corollary 2.5. 体 \mathbb{k} の標数を 0 とする. n, s と d_i が以下のうちのどれかひとつの条件を満たすならば, V -ジェネリックイデアルの辞書式順序に関するイニシャルイデアルは *lexsegment* である.

- $n = 3, s = 2$, and $2 \leq d_1, d_2 \leq 3$.
- $n = 3, s = 3$, and $2 \leq d_1, d_2, d_3 \leq 3$.
- $n = 4, s = 3$, and $2 \leq d_1, d_2, d_3 \leq 3$.

他にも V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルを計算する方法を考案した.

Definition 2.6. \bar{t} を \bar{x} とは共通部分を持たない別の変数の集合とする. $\preceq_{\bar{t}}$ と \preceq をそれぞれ $\mathcal{M}(\bar{t})$ と $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上の単項式順序とする. u_1, u_2 を $\mathcal{M}(\bar{t})$ の単項式とし, v_1, v_2 を $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式とする. $\mathcal{M}(\bar{t} \cup \bar{x})$ 上の単項式順序 \preceq' を以下のように定める:

$$u_1 v_1 \preceq' u_2 v_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} v_1 \preceq v_2 \text{ または } (v_1 = v_2, \text{ かつ } u_1 \preceq_{\bar{t}} u_2).$$

単項式順序 \preceq' を $\mathcal{M}(\bar{t} \cup \bar{x})$ 上の逆ブロック順序と呼ぶ.

以降, $\mathcal{M}(\bar{t} \cup \bar{x})$ 上の単項式順序 \preceq' は逆ブロック順序とし, \preceq' を $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上の単項式順序に制限した \preceq は $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式順序として考えていたもの (ここでは特に辞書式順序) とする. また, 多項式 $g \in \mathbb{k}[\bar{t}, \bar{x}]$ について, $\text{LM}_{\preceq}(g)$ は g を $\mathbb{k}[\bar{t}][\bar{x}]$ の元として見たときの, $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式順序 \preceq に関しての先頭単項式とする. つまり $\text{LM}_{\preceq}(g)$ は $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式である.

Theorem 2.7. I' を $\mathbb{k}[\bar{t}, \bar{x}]$ のイデアルで

$$\begin{aligned} F_1 &= t_{1,1}x_1^{d_1} + t_{1,2}x_1^{d_1-1}x_2 + \cdots + t_{1,r_1}x_n^{d_1} \\ &\vdots \\ F_s &= t_{s,1}x_1^{d_s} + t_{s,2}x_1^{d_s-1}x_2 + \cdots + t_{s,r_s}x_n^{d_s}. \end{aligned}$$

で生成されているとする. \mathcal{G} を逆ブロック順序 \preceq' に関する I' のグレブナー基底とする. このとき, $\{\text{LM}_{\preceq}(g) \mid g \in \mathcal{G}\}$ で生成される $\mathbb{k}[\bar{x}]$ の単項式イデアルは V -ジェネリックイデアルの, 制限した単項式順序 \preceq に関するイニシャルイデアルになっている.

Theorem 2.7 を使って, U -ジェネリックイデアルの中でイニシャルイデアルが *lexsegment* になるような例は存在しないことを特定の状況下で示した.

Corollary 2.8. 体 \mathbb{k} の標数を 0 とする. $n = 4, s = 2, d_1 = d_2 = 2$ のとき, 点 $\mathbf{a} \in U$ で, 対応するイデアルの辞書式順序に関するイニシャルイデアルが *lexsegment* になるような \mathbf{a} は存在しない.

Corollary 2.5 と Corollary 2.8 から以下の間を考え, それらの主張が正しいことを期待できる.

Question 2.9. $n - s \geq 2$ のとき, どのような d_i についても $\text{in}_{\preceq}(I)$ が *lexsegment* になるような $\mathbf{a} \in U$ は存在しないか.

Question 2.10. $n - s \leq 1$ のとき, どのような d_i についても V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは *lexsegment* になるか.

特に, Question 2.10 は Moreno-Sociás 予想の辞書式順序への類推とみなすことができる.

参考文献

- [1] David Bayer and Michael Stillman, *A theorem on refining division orders by the reverse lexicographic order*, Duke Math. J. **55** (1987), no. 2, 321–328. MR 894583
- [2] Thomas Becker and Volker Weispfenning, *Gröbner bases*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 141, Springer-Verlag, New York, 1993, A computational approach to commutative algebra, In cooperation with Heinz Kredel. MR 1213453
- [3] David A. Cox, John Little, and Donal O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, fourth ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. MR 3330490

- [4] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry. MR 1322960
- [5] Ralf Fröberg, *An inequality for Hilbert series of graded algebras*, Math. Scand. **56** (1985), no. 2, 117–144. MR 813632
- [6] Ralf Fröberg and Clas Löfwall, *On Hilbert series for commutative and noncommutative graded algebras*, J. Pure Appl. Algebra **76** (1991), no. 1, 33–38. MR 1140638
- [7] Jürgen Herzog and Takayuki Hibi, *Monomial ideals*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 260, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. MR 2724673
- [8] Ezra Miller and Bernd Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 227, Springer-Verlag, New York, 2005. MR 2110098
- [9] Guillermo Moreno-Socías, *Degrevlex Gröbner bases of generic complete intersections*, J. Pure Appl. Algebra **180** (2003), no. 3, 263–283. MR 1966660
- [10] Keith Pardue, *Generic sequences of polynomials*, J. Algebra **324** (2010), no. 4, 579–590. MR 2651558